

INTEGRALI DOPPI

Esercizi proposti

1. Calcolare i seguenti integrali doppi:

(a) $\int_A (4 + 2x - 5y) \, dx \, dy$, $A = \{(x, y) : -2 \leq x \leq 2, -1 \leq y \leq 1\}$; [32]

(b) $\int_A (x^2 + y^3) \, dx \, dy$, $A = \{(x, y) : -2 \leq x \leq 2, -2 \leq y \leq 2\}$; [64/3]

(c) $\int_A (x^2 + y) \, dx \, dy$, $A = \{(x, y) : -1 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x^2\}$; [3/5]

(d) $\int_A (e^x + e^y) \, dx \, dy$, $A = \{(x, y) : -3 \leq x \leq 3, -x \leq y \leq x\}$; $[5e^3 + e^{-3}]$

(e) $\int_A (x + y) \, dx \, dy$, $A = \{(x, y) : 1 \leq x \leq 2, x^2 \leq y \leq 2x^2\}$; [261/20]

(f) $\int_A \sin y^2 \, dx \, dy$, $A = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 2\sqrt{\pi}, x/2 \leq y \leq \sqrt{\pi}\}$; [2]

(g) $\int_A |y - x| \, dx \, dy$, $A = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, x^2 \leq y \leq 1\}$; [11/60]

(h) $\int_A |x^3 - y| \, dx \, dy$, $A = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2\}$; [23/14]

(i) $\int_A (x + 1) \, dx \, dy$, $A = \{(x, y) : y \leq 2x, y \leq -2x, y \geq x^2 - 3\}$ [10/3]

(j) $\int_A x \, dx \, dy$, $A = \{(x, y) : y \leq x, y \leq -x + 6, y \geq x^2 - 6x\}$. [135]

2. Sia A la regione di piano racchiusa nel triangolo di vertici $A_1 = (0, 0)$, $A_2 = (3, 0)$ e $A_3 = (0, 3)$ e dotata di densità unitaria. Calcolare il momento di inerzia di A rispetto al vertice A_3 . [27]

3. Calcolare il momento di inerzia rispetto all'origine degli assi della lamina piana di densità unitaria $B = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, x^2 \leq y \leq 1\}$. [44/105]

4. Calcolare il baricentro delle regioni di piano dotate di densità unitaria

(a) $A = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, x \leq y \leq x^2\}$;

(b) $B = \{(x, y) : -1 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq -x^2 + 4\}$.

$$\left[\left(\frac{1}{2}, \frac{2}{5} \right) \text{ e } \left(0, \frac{203}{110} \right) \right]$$

5. Calcolare i seguenti integrali doppi:

(a) $\int_D \frac{y}{x^2 + y^2} \, dx \, dy$, $D = \{(x, y) : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, y \geq x\}$; $[\sqrt{2}]$

(b) $\int_D \frac{y^2}{1 + x^2 + y^2} \, dx \, dy$, $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0, y \geq 0\}$; $[\pi(1 - \log 2)/8]$

(c) $\int_D (1 + x^2 + y^2) \, dx \, dy$, $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1, y \leq -x\}$; $[3\pi/4]$

$$(d) \int_D y^2 \, dx \, dy, \quad D = \{(x, y) : 25x^2 + 16y^2 \leq 400, y \geq 0\}. \quad [25\pi/8]$$

6. Determinare il baricentro e calcolare il momento di inerzia rispetto all'origine degli assi della lamina piana di densità unitaria $C = \{(x, y) : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 9, x \geq 0, y \geq 0\}$.

$$\left[\left(\frac{13}{3\pi}, \frac{13}{3\pi} \right), 10\pi \right]$$

7. Calcolare i seguenti integrali impropri:

$$(a) \int_D \frac{1}{3 + x^2 + y^2} \, dx \, dy, \quad D = \{(x, y) : 1 \leq x^2 + y^2\}; \quad [\text{divergente}]$$

$$(b) \int_D e^{-x^2-y^2} \, dx \, dy, \quad D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \geq 4, x \geq 0, y \geq 0\}; \quad [\pi/4]$$

$$(c) \int_D \frac{1}{(x^2 + y^2)^{1/2}} \, dx \, dy, \quad D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1, 0 \leq y \leq x\}; \quad [\pi/4]$$

$$(d) \int_D \frac{x}{(x^2 + y^2)^3} \, dx \, dy, \quad D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1, 0 \leq y \leq x\}. \quad [\text{divergente}]$$